Konkurs matematyczny im. Samuela Chróścikowskiego

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie

13 marzec 2008

Imię i nazwisko:..

Szkoła:..

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: ☐

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE. Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowana jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.
W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!!!!

Zadanie 1. Zbiór punktów płaszczyzny $\{(x, y) : |x - y| + 1 \leqslant |x + y|\}$

☐ a) jest symetryczny względem prostej $y = x$,

☐ b) ma środek symetrii,

☐ c) jest zbiorem ograniczonym.

Zadanie 2. Liczba $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

☐ a) jest liczbą ujemną,

☐ b) jest równa -1,

☐ c) jest liczbą niewymierną.

Zadanie 3. Równanie $10^{\sin x} = x$ ma

☐ a) nieskończenie wiele rozwiązań,

☐ b) co najmniej jedno rozwiązanie,

☐ c) dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 4. Dwa okręgi styczne zewnętrznie mają wspólne styczne przecinające się pod kątem $\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Niech $p > 1$ oznacza stosunek promieni tych okręgów. Zatem:

- [ ] a) jeżeli $p = 3$, to $\alpha = 30^0$,
- [ ] b) $p = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$,
- [ ] c) jeżeli $\alpha = 60^0$, to $p = 3$.

Zadanie 5. Liczby $a, b;\ 0 < a < b$ są takimi liczbami całkowitymi, że 3 nie dzieli $a \cdot b$. Wynika stąd, że liczba 3 dzieli zawsze:

- [ ] a) $a + b$,
- [ ] b) $a - b$,
- [ ] c) $a^2 - b^2$.

Zadanie 6. Rozważmy taki ciąg kwadratów $\{k_n\}$, że bok kwadratu k_n jest co do długości równy przekątnej kwadratu $k_{n+1},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Jeżeli $\{|k_n|\}$ jest ciągiem pól tych kwadratów o $k_1 = 1$, to

- [ ] a) ciąg $\{|k_n|\}$ jest ciągiem geometrycznym,
- [ ] b) $\lim\limits_{n\to\infty} |k_n| = 0$,
- [ ] c) $\lim\limits_{n\to\infty} (|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|) = 2$.

Zadanie 7. Prawdziwa jest nierówność

- [ ] a) $2^{\sqrt{5}} > 4$,
- [ ] b) $\sqrt{5}^{\sqrt{2}} < 5$,
- [ ] c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \frac{1}{27}$.

Zadanie 8. Osoba wędruje po płaszczyźnie OXY od punktu $A(0, 0)$ do punktu $B(3, 3)$ stawiając kroki tylko o długości 1 i tylko w kierunku poziomym - na prawo lub pionowym - do góry. Wynika stąd, że może ona przejść do punktu B na:

- [ ] a) $\frac{6!}{(3!)^2}$ sposobów,
- [ ] b) 2^6 sposobów,
- [ ] c) 20 sposobów.

Zadanie 9. Wahania kursów akcji w okresie jednego roku opisuje funkcja

$$f(t) = 14 + 10\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 12.$$

Zatem

- [ ] a) wahania kursów akcji są okresowe,
- [ ] b) najwyższy kurs został osiągnięty co najmniej raz,
- [ ] c) kurs najwyższy wyniósł 25.

Zadanie 10. Jeśli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego i stosunek dłuższej podstawy do krótszej jest równy 2, to:

a) ramię jest równe krótszej podstawie,

b) przekątna jest prostopadła do jednego z ramion,

c) kąt ostry trapezu ma miarę 60^0.

Zadanie 11. Zbiór rozwiązań nierówności $(x-1)^k(x-2)^l(x-3)^m \leqslant 0$, gdzie $k, l, m \in \mathbb{N}_+$ jest zbiorem ograniczonym. Wynika stąd, że

a) liczby k, l, m są parzyste,

b) co najmniej jedna z liczb k, l, m jest parzysta,

c) liczba $k+l+m$ jest parzysta.

Zadanie 12. Dane jest równanie $x^{n+2}+64 = x^{n+1}+64x$, gdzie n jest nieparzystą liczbą naturalną. Wynika stąd, że równanie to ma:

a) dwa pierwiastki,

b) trzy pierwiastki,

c) trzy pierwiastki całkowite.

Zadanie 13. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = ||x|-3|-2$. Wynika stąd, że

a) funkcja f ma cztery miejsca zerowe,

b) f nie jest funkcją nieparzystą,

c) największą wartością funkcji jest liczba 1.

Zadanie 14. Punkty A, B, C są różnymi punktami okręgu o środku S takimi, że styczna do okręgu w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D i $|DB| < |DC|$. Wówczas

a) miara kąta ASB jest dwukrotnie mniejsza niż miara kąta BAD,

b) trójkąty ABD i ACD są podobne,

c) $|CD| \cdot |BD| = |AD|^2$.

Zadanie 15. Liczba $a = \log(\operatorname{tg} 43^0) + \log(\operatorname{tg} 44^0) + \log(\operatorname{tg} 45^0) + \log(\operatorname{tg} 46^0) + \log(\operatorname{tg} 47^0)$

a) jest liczbą całkowitą,

b) jest równa 1,

c) jest równa 0.

Zadanie 16. O zdarzeniach A i B wiadomo, że zawsze zachodzi co najmniej jedno z nich, są jednakowo prawdopodobne i $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Wobec tego:

a) $P(A) = P(B) = \frac{4}{7}$,

b) $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,

c) $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.

Zadanie 17. Suma dwóch cyfr liczby trzycyfrowej m jest równa 10. Wynika stąd, że:

a) $m \leqslant 820$,

b) $m \leqslant 910$,

c) $m \leqslant 995$.

Zadanie 18. Ośmiościan foremny przekształcono przez pewną jednokładność o skali $\sqrt{3}$. W wyniku tego

a) objętość wzrosła co najmniej o 400%,

b) pole powierzchni całkowitej wzrosło co najmniej o 200%,

c) długość najdłuższej przekątnej wzrosła co najmniej o 75%.

Zadanie 19. n - ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 3n^2$. Wobec tego:

a) $a_8 + a_9 + a_{10} = 153$,

b) n - ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $3n$,

c) n - ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $6n - 3$.

Zadanie 20. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x-1}$ i niech $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas dla każdego $x \neq 1$

a) $f^2(x) = x$,

b) $f^6(3) = 3$,

c) $f^9(3) = 1,5$.

ZADANIA OTWARTE

1. *Bawiły się raz małpy - wieść indyjska niesie -*
   Ósma ich częśċ w kwadracie już skacze po lesie,
   Pozostałych dwanaście w pląsach i z wrzaskami
   Pomiędzy zielonymi hasa pagórkami.
   Ileż ich wszystkich było? - pyta się Bhashara,
   Zagadka nie trudna, chociaż bardzo stara.

2. *Znalèźć trzy liczby proporcyi Arytmetycznèy, których summa kwadratów iest 200, a kwadràt ṡrzednièy przewyższà wieloczyn skraynych cztèrèma iednościami.*

Źródło: „Stare polskie zadania z matematyki”, Witold Więsław, Opole 2000.

ROZWIĄZANIE: