Zadanie 1. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x-1}$ i niech $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x)\ldots)))$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas

a) $f^2(x) = x$ dla każdego $x \neq 1$,

b) $f^6(3) = 3$,

c) $f^9(3) = 1,5$.

Zadanie 2. Ciągi (a_n) i (b_n) są rozbieżne do $+\infty$. Wynika stąd, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Zadanie 3. Równanie $2^{\sin x} = -\sin^2 x$

a) ma nieskończenie wiele rozwiązań,

b) nie ma rozwiązania,

c) ma 2 rozwiązania.

Zadanie 4. Liczba $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ jest

a) dodatnia,

b) całkowita,

c) równa zeru.

Zadanie 5. Przekrój płaski czworościanu foremnego może być

a) trójkątem rozwartokątnym,

b) trójkątem prostokątnym,

c) pięciokątem.

Zadanie 6. Liczba 100! jest podzielna przez

a) 5^{22},

b) 51^2,

c) 49^8.

Zadanie 7. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 2 i 3 dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokatną na dwa odcinki, z których jeden ma długość

a) $\sqrt{2,08}$,

b) $\frac{3\sqrt{13}}{5}$,

c) mniejszą od 1,5.

Zadanie 8. Rozwiązaniem równania $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ jest

- [ ] a) 2,25,
- [ ] b) $\frac{3}{2}$,
- [ ] c) 1.

Zadanie 9. Jeśli $a \circ b = 2ab - a - b$ i $5 \circ 3 = 4 \circ x$ to x jest równe

- [ ] a) $3\frac{2}{5}$,
- [ ] b) $3\frac{5}{7}$,
- [ ] c) 4.

Zadanie 10. Najdłuższy bok trójkąta ma długość 3 a najkrótszy 1. Największe pole trójkąta spełniającego te warunki jest równe

- [ ] a) $\frac{3}{2}$,
- [ ] b) $\frac{\sqrt{35}}{5}$,
- [ ] c) $\frac{\sqrt{35}}{4}$.

Zadanie 11. Wiadomo, że liczba bakterii w pewnej populacji codziennie się podwaja. Populacja ta osiąga maksymalna liczebność po 30 dniach. Wynika stąd, że populacja osiągnie 0,03125 liczebności maksymalnej po

- [ ] a) 20 dniach,
- [ ] b) 22 dniach,
- [ ] c) 25 dniach.

Zadanie 12. Funkcja $f(x) = |||x| - 1| - 1|$

- [ ] a) nie ma ekstremów,
- [ ] b) ma trzy ekstrema,
- [ ] c) ma pięć ekstremów.

Zadanie 13. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i sumie wyrazów S, zaś ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = a_n^2$. Wynika stąd, że suma ciągu (b_n)

- [ ] a) istnieje,
- [ ] b) jest równa S^2,
- [ ] c) jest równa $\frac{a_1 S}{1+q}$.

Zadanie 14. Sześcian i walec mają równe objętości. Wobec tego

- [ ] a) pole powierzchni całkowitej walca jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej sześcianu,
- [ ] b) pole powierzchni całkowitej walca może być większe od pola powierzchni całkowitej sześcianu,
- [ ] c) pole powierzchni całkowitej walca jest najmniejsze gdy przekrój osiowy walca jest kwadratem.

Zadanie 15. Obrazem kwadratu K w translacji jest kwadrat K_1 i częścią wspólną tych kwadratów jest kwadrat K_2 o polu dwa razy mniejszym niż pole kwadratu przesuniętego. Wobec tego:

- [ ] a) przekątna kwadratu K_2 ma długość równą długości boku kwadratu K_1,
- [ ] b) wektor przesunięcia ma długość będącą liczbą niewymierną,
- [ ] c) długość wektora przesunięcia może być równa 1.

Zadanie 16. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ losujemy jedną. Wobec tego prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest

- [ ] a) podzielna przez trzy wyniosi $\frac{1}{3}$,
- [ ] b) pierwsza wynosi $\frac{2}{5}$,
- [ ] c) kwadratem liczby naturalnej wynosi $\frac{1}{5}$.

Zadanie 17. Kulę ziemską opasano taśmą przylegającą do jej powierzchni wzdłuż równika (przyjmujemy, że równik jest okręgiem). Następnie taśmę przecięto i doklejono 10m taśmy tak, aby uzyskać równy prześwit między taśmą a Ziemią w każdym miejscu. Czy przez ten prześwit przejdzie swobodnie:

- [ ] a) koń (200 cm wysokości),
- [ ] b) pies (120 cm wysokości),
- [ ] c) mysz (5 cm wysokości)?

Zadanie 18. Dziesięciokrotność iloczynu sześcianu 1000 trylionów przez odwrotność kwadratu miliona bilionów wynosi:

- [ ] a) 10^{27},
- [ ] b) 10^{99},
- [ ] c) 10^{100}.

Zadanie 19. Niech $[x]$ oznacza część całkowitą z x. Wówczas układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ [x] + [y] = -1 \end{cases}$:

- [ ] a) ma więcej niż dwa rozwiązania,
- [ ] b) ma nie więcej niż dwa rozwiązania,
- [ ] c) nie ma rozwiązania.

Zadanie 20. Jeżeli S jest sumą współczynników wielomianu $W(x) = (-2x^3 + x^2 - 3x + 3)^{2010}$, to:

- [ ] a) $S = -1$,
- [ ] b) $S = -2010$,
- [ ] c) $S = -2 \cdot 2010$.

ZADANIA OTWARTE

1. *W turnieju szachowym uczestniczyło 100 uczniów. Turniej trwał cały rok szkolny, a każdy uczeń rozegrał z każdym tylko jedną partię i nie zanotowano remisów. Niech x_i będzie liczbą zwycięstw zawodników o numerze i na liście startowej, zaś y_i niech będzie liczbą jego przegranych.*
   Udowodnij, że $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{100}^2$.

2. *Pająk rozpina nitki pajęczyny we wnętrzu szklanego sześcianu. Początek i koniec każdej nitki znajduje się bądź w wierzchołku, bądź na środku ściany, nigdy jednak na tej samej ścianie sześcianu. Ile nitek może w ten sposób rozpiąć?*

ROZWIĄZANIE: