Zadanie 1. Wielomian $W(x) = x^{15} + ax + b$ jest podzielny przez $x^2 - 1$ dla

☐ a) $a = 1$ i $b = 0$,

☐ b) $a = 1$ i $b = 1$,

☐ c) $a = -1$ i $b = 0$.

Zadanie 2. Nierówność $\sqrt{2 - |x|} < \frac{|x|}{x}$ spełniają liczby:

☐ a) $x \in (1, 2\rangle$,

☐ b) $x \in (1, \infty)$,

☐ c) $x \in \langle -1, 2\rangle$.

Zadanie 3. W pewnym wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest dwa razy większa od liczby boków. Warunek ten spełnia:

☐ a) sześciokąt,

☐ b) siedmiokąt,

☐ c) ośmiokąt.

Zadanie 4. Niech $x = \sin\left(\frac{2011!}{2011}\pi\right)$ oraz $y = \cos\left(\frac{2011!}{2011}\pi\right)$. Zachodzi zatem:

☐ a) $x = y$,

☐ b) $x > y$,

☐ c) $x < y$.

Zadanie 5. Ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest ciągiem rosnącym. Wynika z tego, że ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym

☐ a) $b_n = \sqrt{a_n^2 + 1}$ jest rosnący,

☐ b) $b_n = a_n + 5$ jest rosnący,

☐ c) $b_n = \frac{1}{n} a_n$ jest malejący.

Zadanie 6. Istnieją takie niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, że mogą zachodzić następujące równości:

☐ a) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$,

☐ b) $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$,

☐ c) $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Zadanie 7. Równanie $xy^2 = yx^2$ przedstawia na płaszczyźnie:

☐ a) dwie parabole,

☐ b) prostą,

☐ c) trzy proste.

Zadanie 8. NWD$(65^2, 15^7)$·NWW$(15^7, 65^2)$ jest liczbą podzielną przez

- [ ] a) 169,
- [ ] b) 3^6 i 65,
- [ ] c) 39.

Zadanie 9. Jeżeli $\frac{3a+b}{b-a} = 5$ oraz $a, b \in \mathbb{C}$, to

- [ ] a) $\frac{a+3b}{2a+b} = 1\frac{1}{2}$,
- [ ] b) $\frac{a+3b}{2a+b} = 1\frac{1}{4}$,
- [ ] c) $\frac{a+3b}{2a+b} > \frac{3}{2}$.

Zadanie 10. Proste $y = ax$ i $y = -x + b$ przecinają się w punkcie, którego obie współrzędne są ujemne. Wobec tego nie jest prawdą, że

- [ ] a) $a < 0$ i $b < 0$,
- [ ] b) $a > 0$ i $b < 0$,
- [ ] c) $b > 0$ i $a < -1$.

Zadanie 11. Jeżeli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, to liczba $p!$

- [ ] a) też jest nieparzysta,
- [ ] b) nie jest kwadratem liczby naturalnej,
- [ ] c) dzieli się przez liczbę $\frac{1}{2}(p-1)$.

Zadanie 12. W trójkącie ABC poprowadzono wysokość $\overline{CD}$. Punkt D dzieli podstawę $\overline{AB}$ na dwie części o długościach $|AD| = 18$ i $|DB| = 7$. Prostopadle do podstawy $\overline{AB}$ poprowadzono prostą, która dzieli trójkąt na dwie części o jednakowych polach. Odcinki, na które prosta ta dzieli podstawę trójkata pozostają w stosunku

- [ ] a) 5:4,
- [ ] b) 4:3,
- [ ] c) 3:2.

Zadanie 13. $\sqrt{5\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}} - \sqrt{5\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}}$ jest liczbą

- [ ] a) z przedziału $(-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$,
- [ ] b) dodatnią,
- [ ] c) równą 0.

Zadanie 14. Stosunek pola prostokąta wpisanego w koło do pola tego koła jest mniejszy od

- [ ] a) $\frac{2}{3}$,
- [ ] b) $\frac{3}{4}$,
- [ ] c) $\frac{4}{5}$.

Zadanie 15. Średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest o 30% mniejsza niż większa z nich. Zatem średnia arytmetyczna jest większa od mniejszej z nich o:

- [ ] a) 70%,
- [ ] b) 75%,
- [ ] c) więcej niż 80%.

Zadanie 16. W półkole o średnicy długości $2R$ wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Promień okręgu stycznego równocześnie do półokręgu AB, do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB jest równy

- [ ] a) $30\%R$,
- [ ] b) $\frac{1}{6}R$,
- [ ] c) $\frac{1}{4}R$.

Zadanie 17. Liczba $\left|\dfrac{40 \cdot 2^{13} + 28 \cdot 8^4}{112 \cdot 32^2 - 64^3}\right|$ jest

- [ ] a) pierwsza,
- [ ] b) parzysta,
- [ ] c) równa 3.

Zadanie 18. Pole trapezu równoramiennego wynosi P. Suma długości jego podstaw jest równa S. Pole kwadratu zbudowanego na przekątnej tego trapezu jest równe

- [ ] a) $\frac{4}{S^2} + \frac{S^2}{4P^2}$,
- [ ] b) $\frac{S^4+16P^2}{4S^2}$,
- [ ] c) $4S^2 + \frac{4P^2}{S^2}$.

Zadanie 19. Gdy do roztworu wodnego soli kuchennej o stężeniu 10% dodano jeszcze $0,5$ kg soli, otrzymano roztwór o stężeniu mniejszym niż 15%. Zatem roztworu wodnego soli mogło być

- [ ] a) 9,5 kg,
- [ ] b) 9 kg,
- [ ] c) 8,5 kg.

Zadanie 20. Funkcja $g(x) = f(x) + f(-x)$ jest parzysta. Oznacza to, że

- [ ] a) funkcja f jest parzysta,
- [ ] b) funkcja f jest nieparzysta,
- [ ] c) funkcja f jest dowolną funkcją.

ZADANIA OTWARTE

1. *Dany jest trójkąt* ABC*, w którym kąt* $BAC = 120^{\mathrm{o}}$*. Punkty* K *i* L *leżą odpowiednio na bokach* AB *i* AC*. Niech* BKP *i* CLQ *będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi na zewnątrz trójkąta* ABC*. Udowodnić, że* $|PQ| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(|AB| + |AC|)$*.*

2. *Wykazać, że dla każdego* $a \geqslant 0$ *i dla każdego* $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ *zachodzi nierówność*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

ROZWIĄZANIE: