Zadanie 1. Liczby x i y spełniają równanie $x^2 + y^2 = 1$. Czy x i y mogą być jednocześnie liczbami postaci:

- [ ] a) $\frac{\sqrt{2}}{4} + a$, gdzie a jest liczbą wymierną?
- [ ] b) $\sqrt{5} \cdot a$, gdzie a jest liczbą wymierną?
- [ ] c) $\frac{\sqrt{7}}{4} + a$, gdzie a jest liczbą wymierną?

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$. Dla jakich x jest spełniona nierówność $f(f(x)) \geqslant f(x)$?

- [ ] a) $x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$,
- [ ] b) $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$,
- [ ] c) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$.

Zadanie 3. Kula o promieniu R ma tę samą objętość, co sześcian o przekątnej $\sqrt{3}$. Ile wynosi R?

- [ ] a) $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$,
- [ ] b) $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$,
- [ ] c) $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$.

Zadanie 4. Wiadomo, że dla różnych od zera liczb a i b zachodzi związek $\frac{10a+5b}{2a} = 6$. Wartość wyrażenia $\frac{4a-3b}{7b}$ jest:

- [ ] a) liczbą parzystą,
- [ ] b) kwadratem liczby pierwszej,
- [ ] c) liczbą postaci $3k + 1$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą.

Zadanie 5. Nieprawdą jest, że:

- [ ] a) każda liczba postaci $n^4 – 2n^3 – n^2 + 2n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 12,
- [ ] b) każda liczba postaci $n^5 - n$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 30,
- [ ] c) każda liczba postaci $n^5 – 5n^3 + 4n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 6. Liczba $\sqrt[3]{25 - 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$ jest:

- [ ] a) liczbą całkowitą,
- [ ] b) równa $\sqrt[3]{5}$,
- [ ] c) liczbą niewymierną.

Zadanie 7. W walec o promieniu podstawy długości r i wysokości długości r wpisano graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Wówczas:

- [ ] a) stosunek objętości walca do objętości graniastosłupa wynosi $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$,
- [ ] b) stosunek powierzchni bocznej walca do powierzchni bocznej graniastosłupa wynosi $\frac{2\pi}{3}$,
- [ ] c) objętość graniastosłupa wynosi $3r^3\sqrt{3}$.

Zadanie 8. Liczby a, b, c (dodatnie i różne od 1) tworzą ciąg geometryczny. Wynika z tego, że liczby $\frac{1}{\log_a n}, \frac{1}{\log_b n}, \frac{1}{\log_c n}$, $(n \in \mathbb{N}$ i $n > 1)$:

- ☐ a) tworzą ciąg geometryczny,
- ☐ b) tworzą ciąg arytmetyczny,
- ☐ c) tworzą ciąg arytmetyczno-geometryczny.

Zadanie 9. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny dzieli punktem styczności przeciwprostokątną na odcinki o długościach a i b. Wtedy:

- ☐ a) pole trójkąta wynosi ab,
- ☐ b) promień okręgu opisanego na trójkącie wynosi $a + b$,
- ☐ c) pole trójkąta wynosi $\frac{ab}{2}$.

Zadanie 10. W turnieju bierze udział $2n$ drużyn rozdzielonych do dwóch równolicznych grup. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że dwie najsilniejsze drużyny znajdą się w dwóch różnych grupach wynosi:

- ☐ a) $\frac{\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$,
- ☐ b) $\frac{\binom{n}{2}\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$,
- ☐ c) $\frac{n}{2n-1}$.

Zadanie 11. Tę samą dwucyfrową liczbę naturalną napisano trzy razy obok siebie. Uzyskana w ten sposób liczba 6-cio cyfrowa:

- ☐ a) dzieli się przez 13,
- ☐ b) dzieli się przez 7,
- ☐ c) dzieli się przez 3.

Zadanie 12. Działanie $\otimes$ jest zdefiniowane w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $x \otimes y = xy(x + y)$. Wtedy dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$:

- ☐ a) $x \otimes y = y \otimes x$,
- ☐ b) $x \otimes y = -(y \otimes x)$,
- ☐ c) $(-x) \otimes y = -(y \otimes x)$.

Zadanie 13. Na okręgu o promieniu $15\sqrt{5}$ opisano kwadrat $ABCD$. Środek E boku DC połączono z wierzchołkiem A odcinkiem, który przecina okrąg w punkcie M. Wobec tego:

- ☐ a) długość odcinka EM wynosi 60,
- ☐ b) długość odcinka AE wynosi 75,
- ☐ c) długość odcinka EM jest mniejsza niż 60.

Zadanie 14. Funkcja $f(x) = \sin(\cos(x))$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych:

- ☐ a) jest okresowa,
- ☐ b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych,
- ☐ c) ma największą wartość równą 1.

Zadanie 15. Liczby naturalne dodatnie pogrupowano w następujący sposób: $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \{11,12,13,14,15\}, \ldots$ itd. Prawdą jest, że:

☐ a) liczba 2012 jest w grupie 63,
☐ b) suma liczb z grupy, w której występuje liczba 2012 wynosi 125055,
☐ c) w 2012 grupie jest 2012 liczb.

Zadanie 16. Układ równań $\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ ma:

☐ a) nie mniej niż jedno rozwiązanie,
☐ b) nie mniej niż dwa rozwiązania,
☐ c) nie mniej niż trzy rozwiązania.

Zadanie 17. W kulę o promieniu 5 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości długości 8. Wobec tego:

☐ a) długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa wynosi $4\sqrt{2}$,
☐ b) objętość ostrosłupa wynosi $\frac{256}{3}$,
☐ c) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi $\frac{25}{24}\pi$.

Zadanie 18. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{2012} + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 - x$ wynosi:

☐ a) $x^2 - 1$,
☐ b) $x^2 + 1$,
☐ c) $x^2 + x$.

Zadanie 19. Zbiór D jest dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{\log \sin x}$. Wtedy:

☐ a) funkcja f przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości dla $x \in D$,
☐ b) wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $(0, \pi)$ należą do D,
☐ c) funkcja f przyjmuje tylko jedną wartość dla $x \in D$.

Zadanie 20. W garderobie stoi n par butów ($n > 10$). Wybieramy losowo dwa buty. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy:

☐ a) dwa buty na tę samą nogę jest równe $\frac{1}{2}$,
☐ b) dwa prawe buty jest mniejsze od $\frac{1}{4}$,
☐ c) buty z jednej pary jest równe $\frac{1}{2n-1}$.

ZADANIA OTWARTE

1. Dwie pompy pracując razem napełniają basen w ciągu 7,5 h. Po 5 h wspólnej pracy pompa nr 2 uległa awarii, zaś pompa nr 1 ukończyła napełnianie basenu w 4 h po awarii. Oblicz jak długo trwałoby napełnianie zbiornika, gdyby po 3 h wspólnej pracy zepsuła się pompa nr 1.

2. Promienie dwóch okręgów stycznych zewnętrznie wynoszą odpowiednio R i r. Znajdź promień okręgu stycznego do nich i do wspólnej stycznej zewnętrznej.

ROZWIĄZANIE: