Zadanie 1. Jeżeli $a + b = 1$, to prawidłowe są nierówności

a) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$,

b) $a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}$,

c) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

Zadanie 2. Liczba $\log \operatorname{tg} 40^o \cdot \log \operatorname{tg} 41^o \cdot \ldots \cdot \log \operatorname{tg} 50^o$ jest

a) dodatnia,

b) ujemna,

c) niewymierna.

Zadanie 3. W wyrażeniu $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ wyraz nie zawierający x jest

a) parzysty,

b) podzielny przez 11,

c) podzielny przez 10.

Zadanie 4. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt P taki, że $|BP| = \frac{1}{4}|PC|$. Zatem sinus kąta CAP jest

a) równy $\frac{2\sqrt{7}}{7}$,

b) większy niż $\frac{1}{2}$,

c) mniejszy niż $0,9$.

Zadanie 5. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Zatem:

a) $2\vec{KL} = \vec{KD} + \vec{KC}$,

b) $2\vec{KL} = \vec{AD} + \vec{BC}$,

c) $\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$.

Zadanie 6. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $3^n + 3^{n+3} + 2^{n+2}$ jest

a) podzielna przez 4,

b) złożona,

c) parzysta.

Zadanie 7. Działanie $\otimes$ jest zdefiniowane w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych w następujący sposób $x \otimes y = x^2y - y^2x$. Rozwiązaniem równania $(a+1) \otimes (a-1) = 6$ jest liczba

a) 2,

b) -2,

c) 4.

Zadanie 8. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe S. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest

☐ a) równa $S + d^2$,

☐ b) równa $4\sqrt{S + d^2}$,

☐ c) większa niż $4d$.

Zadanie 9. Liczba $\binom{2013}{2013} + \binom{2013}{2012} + \binom{2013}{2011} + \ldots + \binom{2013}{2} + 2014$:

☐ a) ma 2014 różnych dzielników,

☐ b) jest liczbą pierwszą,

☐ c) jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 10. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego wynosi 3060^o. Wielokąt ten ma

☐ a) parzystą ilość przekątnych,

☐ b) mniej niż 200 przekątnych,

☐ c) więcej niż 100 przekątnych.

Zadanie 11. Przekształcenie płaszczyzny określone wzorem $F((x, y)) = ((a^2 - 3)x, (a^2 - 3)y)$ jest przekształceniem izometrycznym dla

☐ a) $a = \sqrt{2}$,

☐ b) $a = 2$,

☐ c) $a = -\sqrt{2}$.

Zadanie 12. Liczb naturalnych pięciocyfrowych, których suma cyfr po podzieleniu przez 45 daje resztę 3 jest:

☐ a) więcej niż 20,

☐ b) więcej niż 30,

☐ c) więcej niż 40.

Zadanie 13. Równanie $\log_2(x + a) = ax$, gdzie $a \leqslant 0$:

☐ a) ma zawsze jedno rozwiązanie,

☐ b) dla pewnych a ma dwa rozwiązania,

☐ c) dla $a = 0$ jest sprzeczne.

Zadanie 14. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \sqrt[n]{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}}$. Dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest on ciągiem

☐ a) arytmetycznym,

☐ b) stałym,

☐ c) zbieżnym.

Zadanie 15. Funkcja f określona wzorem $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 2x - 1$:

a) ma dokładnie jedno miejsce zerowe,

b) ma więcej niż jedno miejsce zerowe,

c) jest funkcją nieparzystą.

Zadanie 16. Dane są trzy zdania p, q, r. Prawdziwe jest zdanie:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$,

b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$,

c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Zadanie 17. Do miasta w którym są 4 hotele przyjechało pewnego dnia 12 turystów z Chełma. Załóżmy, że każdy turysta losowo wybiera hotel, w którym będzie nocował. Prawdopodobieństwo, że w każdym hotelu zamieszkają po 3 osoby z Chełma (z tej grupy turystów) jest:

a) większe niż $\frac{1}{10}$,

b) większe niz $\frac{2}{10}$,

c) wieksze niz $\frac{3}{10}$.

Zadanie 18. Równanie $\frac{3}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$ opisuje na płaszczyźnie

a) hiperbolę,

b) elipsę,

c) dwie proste.

Zadanie 19. Równanie dwusiecznej kątów zawartych między prostymi $2x + 2y + 7 = 0$ i $7x + y - 4 = 0$ jest postaci

a) $4x - 8y - 43 = 0$,

b) $24x + 12y + 27 = 0$,

c) $2x - 4y - 21 = 0$.

Zadanie 20. Rozwiązaniem równania $\sin^{2013} x - \cos^{2013} x = 1$ jest

a) każda liczba rzeczywista,

b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

c) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ZADANIA OTWARTE

1. Wykaż, że jeśli $x > y$ i $y = \frac{1}{x}$, to $8(x-y)^2 \leqslant (x^2+y^2)^2$.
2. Dane są punkty $A(-2,-1)$ i $B(-2,-5)$. Znajdź na osi OX taki punkt P, a na osi OY punkt Q, aby długość łamanej $APQB$ była najmniejsza.

ROZWIĄZANIE: