PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W CHEŁMIE
INSTYTUT MATEMATYKI i INFORMATYKI
22-100 Chełm, ul. Pocztowa 54
tel./fax. (082) 562 11 24

KONKURS MATEMATYCZNY

im. Samuela Chróścikowskiego

10 kwiecień 2015r. godz. 09.30

Nazwisko i imię: ....

Pesel: ....

Kategoria II nr testu: ....

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: ....

Instrukcja wstępna:

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE.

Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowane jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!

Zadanie 1. Jeśli $x + y + 1 = 0$, to największą wartością wyrażenia $x^3 + y^3 - xy$ jest:

a) 1,

b) 0,

c) $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Kwadratem liczby naturalnej nie może być:

a) suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych,

b) suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych,

c) suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych,

Zadanie 3. Nie jest prawdą, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

a) $|a + b| + |a - b| \geqslant |a| + |b|$,

b) $|a - b| \leqslant |a| - |b|$,

c) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Zadanie 4. Liczby $2a$ i $2b$ są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^2 + ax + b = 0$. Wynika z tego, że:

a) $a - b = \frac{5}{8}$,

b) $a^2 + b^2 = \frac{13}{64}$,

c) $a^3 + b^3 = 8$.

Zadanie 5. Niech r i R oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego i opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a. Prawdą jest, że:

a) $r = \frac{3}{2}a$,

b) $R = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})a$,

c) $\frac{R}{r} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Zadanie 6. Rozwiązaniem równania $|x^4 - 4x^2 + 4| = |2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4|$ jest liczba:

a) $\frac{3+2\sqrt{11}}{5}$,

b) $\sqrt{2}$,

c) $-\sqrt{2}$.

Zadanie 7. Wielomian $W(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ jest podzielny przez:

a) $x - 1$,

b) $x + 1$,

c) $(x - 1)^2$.

Zadanie 8. Funkcja liniowa f spełnia warunki $f\left(2^{2014}+x\right)=2^{2015}+x$. Prawdą jest, że:

a) $f(0)=2^{2015}$,

b) $f(0)>3^{1000}$,

c) $f(2014)<f(2015)$.

Zadanie 9. Wyrazem rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}$, w którym nie występuje x jest:

a) $\binom{12}{9}\cdot 2^3$,

b) 1760,

c) $\binom{12}{3}\cdot 2^9$.

Zadanie 10. Liczby naturalne x i y są rozwiązaniem równania $1-\frac{3}{y}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x\cdot y}=0$. Zatem:

a) $|x-y|=5$,

b) $|x^2-y^2|=50$,

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=100$.

Zadanie 11. Granicą ciągu $a_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}+b_n}$, gdzie $b_n=(2n)!$, $n=1,2,\ldots$ jest:

a) liczba naturalna,

b) liczba całkowita,

c) liczba wymierna.

Zadanie 12. Dane jest wyrażenie $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$. Jeśli n zwiększymy dwukrotnie, to wartość tego wyrażenia:

a) wzrośnie dwukrotnie,

b) nie zmieni się,

c) wzrośnie czterokrotnie.

Zadanie 13. Wiadomo, że $2^x-2^{-x}=3$. Zatem:

a) $4^x+4^{-x}=10$,

b) $8^x-8^{-x}=27$,

c) $32^x-32^{-x}=243$.

Zadanie 14. Wartość wyrażenia $\sin^2 10^{\mathrm{o}}\cdot\sin^2 50^{\mathrm{o}}\cdot\sin^2 70^{\mathrm{o}}$ jest :

a) mniejsza niż $\frac{1}{4}$,

b) mniejsza niż $\frac{1}{8}$,

c) mniejsza niż $\frac{1}{64}$.

Zadanie 15. Długość wektora $\vec{w}=6\vec{u}-8\vec{v}$, gdzie $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są wektorami o długości 1 wzajemnie prostopadłymi jest:

a) równa 2,

b) większa od 8,

c) mniejsza od 9.

Zadanie 16. Ze środkowych trójkąta o polu S zbudowano trójkąt o polu P. Zatem:

a) $P < 80\%S$,

b) $P = 75\%S$,

c) $P < 75\%S$.

Zadanie 17. Prostą równoległą do prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$ i odległą od niej o 3 jest prosta:

a) $3x - 4y + 17 = 0$,

b) $3x - 4y + 5 = 0$,

c) $3x - 4y - 13 = 0$.

Zadanie 18. Niech $f(x) = x|x-1|$. Pochodna funkcji f w punkcie $x_0 = 1$:

a) jest równa 1,

b) nie istnieje,

c) jest liczbą dodatnią.

Zadanie 19. Liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste jest:

a) $189 \cdot 5^9$,

b) $\binom{5}{2} \cdot 5^8$,

c) mniej niż 5^{10}.

Zadanie 20. Równanie $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$ ma:

a) mniej niż cztery rozwiązania,

b) mniej niż trzy rozwiązania,

c) jedno rozwiązanie.

ZADANIA OTWARTE

1. Z urny zawierającej jedną kulę oznaczoną numerem 1, dwie kule oznaczone numerem 2, trzy kule oznaczone numerem 3, ..., dwa tysiące piętnaście kul oznaczonych numerem 2015 wyciągamy bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule mają ten sam numer?

2. Do rzeki o szerokości r wpada pod kątem prostym kanał o szerokości k. Jaka jest największa długość drewnianej belki, która może wpłynąć z kanału do rzeki? (Uwaga: pomijamy grubość belki)

ROZWIĄZANIE:

BRUDNOPIS