PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W CHEŁMIE
INSTYTUT MATEMATYKI i INFORMATYKI
22-100 Chełm, ul. Pocztowa 54
tel./fax. (082) 562 11 24

KONKURS MATEMATYCZNY
im. Samuela Chróścikowskiego
10 kwiecień 2015r. godz. 09.30

Nazwisko i imię: . . . .

Pesel: . . . .

Kategoria I nr testu: . . . .

Wyrażam zgodę na przetwarzanie moich danych osobowych w zakresie związanym z przeprowadzeniem Konkursu.

Podpis: . . . .

Instrukcja wstępna:

Test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE.

Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowane jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

POWODZENIA !!!!!!!!!!

Zadanie 1. Kwadratem liczby całkowitej może być:

☐ a) suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych,

☐ b) suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych,

☐ c) suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych.

Zadanie 2. Funkcja liniowa f spełnia warunki $f(2^{2014}) = 2^{2015}$ i $f(2^{2015}) = 2^{2016}$. Prawdą jest, że:

☐ a) $f(2^{2016}) = 2^{2017}$,

☐ b) $f(0) = 2$,

☐ c) $f(f(f(2))) = 16$.

Zadanie 3. Wyrazem rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, w którym nie występuje x jest:

☐ a) $\binom{12}{9}$,

☐ b) $\binom{12}{8}$,

☐ c) 495.

Zadanie 4. Liczby naturalne x i y są rozwiązaniem równania $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy}$. Zatem:

☐ a) $x^2 + y^2 = 13$,

☐ b) $x^3 + y^3 = 35$,

☐ c) $x^4 + y^4 = 98$.

Zadanie 5. Równanie $x^{2016} - 2015x - 1 = 0$ ma:

☐ a) dokładnie 2016 różnych pierwiastków,

☐ b) dwa pierwiastki całkowite,

☐ c) dwa pierwiastki niewymierne.

Zadanie 6. Granicą ciągu $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ jest:

☐ a) liczba naturalna ,

☐ b) liczba całkowita,

☐ c) liczba wymierna.

Zadanie 7. Istnieje trójkąt, którego dwusieczne przecinają się pod kątem:

☐ a) 70^o,

☐ b) 80^o,

☐ c) 90^o.

Zadanie 8. Zegar wskazuje godzinę 16.00. Załóżmy, że wskazówki zegara poruszają się ruchem ciągłym (bez skoków). Wskazówka minutowa pokryje się ze wskazówką godzinową po upływie:

☐ a) dokładnie 21 minut i 49 sekund,

☐ b) ponad 21 minut i 49 sekund,

☐ c) prawie 21 minut i 49 sekund.

Zadanie 9. Dane jest wyrażenie $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$. Jeśli n zwiększymy dwukrotnie to wartość tego wyrażenia:

- a) wzrośnie dwukrotnie,
- b) wzrośnie 2^n razy,
- c) wzrośnie n^2 razy.

Zadanie 10. Prawdą jest, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

- a) $|a+b| + |a-b| \geqslant |a| + |b|$,
- b) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,
- c) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$.

Zadanie 11. Rozwiązaniem równania $|x^2 + 2x + 5| = |x^2 + 3x + 6|$ jest liczba:

- a) -1,
- b) $\frac{-5-\sqrt{33}}{4}$,
- c) $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$.

Zadanie 12. Pięciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr po podzieleniu przez 45 daje resztę trzy jest:

- a) więcej niż 10,
- b) więcej niż 15,
- c) więcej niż 20.

Zadanie 13. Jeśli $x + y = 1$, to największą wartością wyrażenia $4xy$ jest:

- a) 0,
- b) 2,
- c) 1.

Zadanie 14. Pole ośmiokąta foremnego o boku długości a jest:

- a) większe od pola kwadratu o boku $2a$,
- b) większe od pola koła o promieniu $\frac{3}{2}a$,
- c) równe $(2 + 2\sqrt{2})a^2$.

Zadanie 15. Wiadomo, że $a - \frac{1}{a} = 3$. Zatem:

- a) $a^2 + \frac{1}{a^2} = 11$,
- b) $a^3 - \frac{1}{a^3} = 33$,
- c) $a^5 - \frac{1}{a^5} = 55$.

Zadanie 16. Wielomian $W(x) = x^n - nx^{n-1} + n - 1$ jest podzielny przez:

☐ a) $x - n$,

☐ b) $x - 1$,

☐ c) $x + 1$.

Zadanie 17. Liczba $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$ jest równa:

☐ a) $\sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9}$,

☐ b) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{12}$,

☐ c) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12}$.

Zadanie 18. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, których stosunek obwodów wynosi $5 : 4$. Stosunek pól tych prostokątów jest:

☐ a) równy $\frac{25}{16}$,

☐ b) większy niż 2,

☐ c) mniejszy niż 2.

Zadanie 19. Liczby a i b są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^2 + ax + b = 0$. Wynika z tego, że:

☐ a) $a^2 + b^2 = 5$,

☐ b) $a^3 + b^3 = -7$,

☐ c) $a^4 + b^4 = 17$.

Zadanie 20. Ciąg arytmetyczny składa się z trzech wyrazów dodatnich i ciąg geometryczny składa się z trzech wyrazów dodatnich. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy trzeciemu wyrazowi ciągu geometrycznego, a pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy trzeciemu wyrazowi ciągu arytmetycznego. Zatem:

☐ a) suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest mniejsza od sumy wyrazów ciągu geometrycznego,

☐ b) suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest większa lub równa od sumy wyrazów ciągu geometrycznego,

☐ c) sumy tych ciągów są zawsze równe.

ZADANIA OTWARTE

1. Ze środkowych trójkąta o polu S zbudowano trójkąt. Wyznacz pole tego trójkąta.
2. Ile jest liczb pierwszych p takich, że $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+24$, $p+30$ są jednocześnie liczbami pierwszymi? (Odpowiedź uzasadnij).

ROZWIĄZANIE:

BRUDNOPIS